



TITLE:

2軸回転球体流れの構造を探索(乱流と輸送現象:コーヒーカップから宇宙まで)

AUTHOR(S):

木田, 重雄; 後藤, 晋; 石井, 伸和; 松原, 大樹; 中山, 健太郎; 西岡, 通男

CITATION:

木田, 重雄 ...[et al]. 2軸回転球体流れの構造を探索(乱流と輸送現象:コーヒーカップから宇宙まで). 数理解析研究所講究録 2007, 1567: 141-152

ISSUE DATE:

2007-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81190>

RIGHT:

2 軸回転球体流れの構造を探る

京都大学 工学研究科 木田重雄 (Shigeo Kida),
後藤 晋 (Susumu Goto), 石井伸和 (Nobukazu Ishii),
松原大樹 (Hiroki Matsubara), 中山健太郎 (Kentaro Nakayama)
大阪府立大学 名誉教授 西岡通男 (Michio Nishioka)

1 はじめに

乱流は流体の不安定な運動状態で、微小な外的ノイズが瞬間速度場を劇的に変化させるし、また平均場への影響も大きい。乱流研究に、ノイズの少ない装置で素性の知れた乱流を生成させる装置が望まれるゆえんである。そのような乱流発生装置、あるいは新しいタイプの手軽な混合器の可能性をもつ 2 軸回転球体の流れが本稿の研究対象である [Goto et al.(2007)]。

周知のごとく、一定角速度で回転する容器内の流れは、時間が十分たつと必ず、剛体回転流になっておさまる。ところが、この回転軸（スピン回転軸）とは異なる向きの軸のまわりの回転（歳差回転）をこれに加えると、容器内の流れは剛体回転流のような単純なものではなくなり、一般には、自明でない複雑な流れになる。ここでは、問題をできるだけ簡単にするために、容器として球を採用し、スピン回転軸と歳差回転軸が直交する場合の歳差回転球体内部の流体の流れ構造を考察する（図 1）。

地球は、スピン回転周期が 1 日、歳差回転周期が 25800 年、両回転軸の交角が -23.5° で歳差運動をしていることから、地球磁場の生成維持機構の起源がこの歳差運動によって駆動される地球内部の外核の熔融金属のダイナモ作用にあるとして、そのメカニズムを解明するために、これまで歳差回転球、歳差楕円体、あるいは歳差球殻内の流れの研究が数多くなされてきている [e.g. Busse(1968), Malkus(1968), Vanyo et al.(1995), Vanyo & Dunn(2000), Noir et al.(2001), Tilgner & Busse(2001), Noir et al.(2003)]。

しかし、上記のように、我々はこれとは別の観点から— すなわち、乱流発生装置、あるいは新しいタイプの混合器としての応用を目指して— 歳差回転球体内の流れを研究する。流体を取り囲む容器の幾何形状も流れの駆動機構も単純なものであるが、この

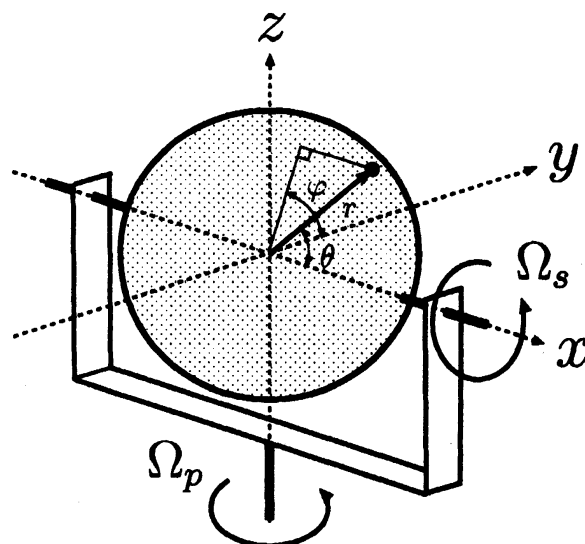


図 1: 2 軸回転球 鉛直軸のまわりに角速度 Ω_p で回転している水平軸のまわりに別の角速度 Ω_s で回転する球体内の非圧縮粘性流体の運動を考える。

系の流れの性質についてはあまり知られていない。本稿では、このような基礎的な流体系における流れの特性の体系的な研究の最初の報告として、実験的、数値的および解析的に調べた流れの時空間構造を紹介する。

2 基礎方程式

2軸回転球体内の非圧縮粘性流体の運動を角速度 Ω_p で回転する系（歳差回転系）で記述する。球の中心が原点、スピン回転軸が x 軸、歳差回転軸が z 軸となる直角座標系 (x, y, z) を導入する（図 1）。流れを記述するすべての物理量を、長さとして球の半径 a 、時間として歳差角速度 Ω_s の逆数（このとき、スピン回転の無次元周期は 2π となる）、そして密度 ρ および動粘性係数 ν を用いて無次元化すると、ナヴィエ・ストークス方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} - 2\Gamma \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} - \nabla P + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (1)$$

また、連続の式は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

と書ける。ここに、 $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ は速度場、 $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{u}$ は渦度場、 t は時間、 $P = p + \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2 - \frac{1}{2}\Gamma^2(\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{z}})^2$ は修正圧力（ p は真の圧力、 \mathbf{r} は位置ベクトル）、 $\hat{\mathbf{z}}$ は z 軸方向の単位ベクトル、そして ∇ は勾配演算子である。

この方程式系は2つの無次元パラメータ、すなわち、レイノルズ数

$$Re = \frac{a^2 \Omega_s}{\nu} \quad (3)$$

とポアンカレ数

$$\Gamma = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} \quad (4)$$

のみによって特徴づけられる。

球面での粘着条件は

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{r} \quad (|\mathbf{r}| = 1 \text{ で}) \quad (5)$$

で与えられる。

3 実験 — 流れの分類

2軸回転球体内流れの実験装置を図 2 に示す。図の中央部にある半透明の球体は、内径 10 cm のアクリル製で、中には脱気した水道水と可視化のための球形の微小粒子（Kanomax OR-GASOL, 比重 1.03 g/cm³, 半径 50 μm）が入れてある。球体は図ではやや右下がりに見える水平回転軸のまわりを角速度 Ω_s で回転する。球体から左下にある直方体の箱はレーザー光源で、球体の中心付近を回転軸に垂直に切るような薄いレーザーシート光が照射される。このレーザー光に照らされた微小粒子の映像を球体の左方、軸のやや上方に取り付けたビデオカメラで撮影する。高さ 24 mm 幅 40 mm の矩形領域で得られたその映像を粒子画像流速計測法 (PIV) により解析し、シート面内の速度場を求める。以上の装置はすべて、中央部下方にある大きな円形のターンテーブルとともに、鉛直軸のまわりに一定の角速度 Ω_p で回転している。

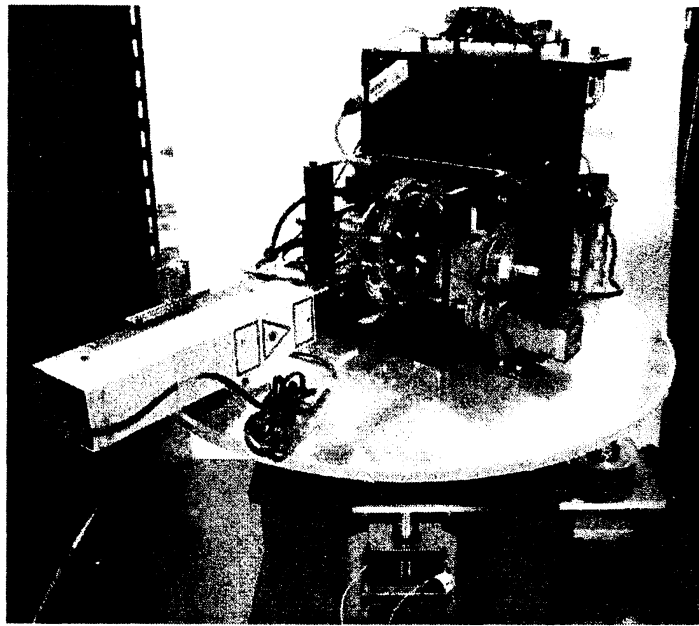


図 2: 2 軸回転球体流れの実験装置

なお, 2つの回転はいずれもパルスモータで駆動する。この実験では, 球の内半径 $a = 5$ cm, 水の動粘性係数 $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ であるから, スピン回転角速度を $\Omega_s = 2\pi n$ (n は整数) とすると, $Re = 1.6 \times 10^4 n$ となる。

さて, 2 軸回転系における流れの様相をその時間変化に着目して分類する。PIV で得られた 2次元速度場 $v_i(\mathbf{x}, t)$ ($i = 1, 2$) を用いて, 速度場の 2 時刻相関関数,

$$C_i(\mathbf{x}, \tau) = \frac{\langle [v_i(\mathbf{x}, t) - m_i(\mathbf{x})][v_i(\mathbf{x}, t + \tau) - m_i(\mathbf{x})] \rangle}{\sigma_i(\mathbf{x})^2} \quad (6)$$

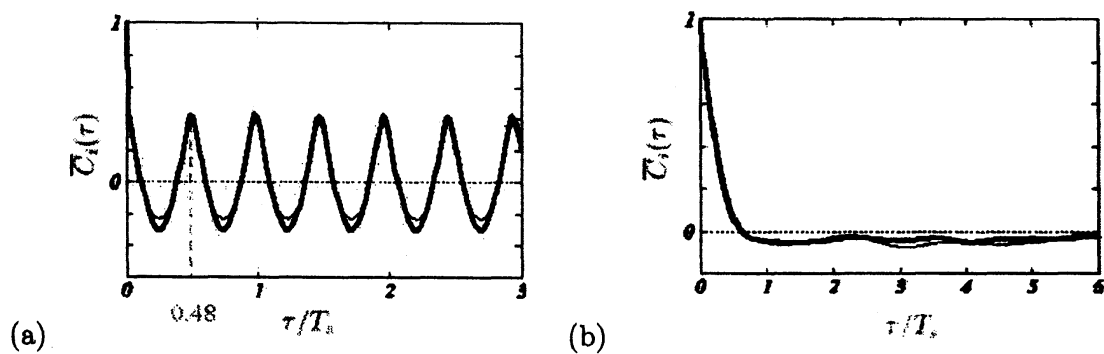


図 3: 速度相関関数 $Re = 4700$. (a) 周期流 (周期 $0.48T_s$). $\Gamma = 0.04$. (b) 非周期流. $\Gamma = 0.1$. ただし, T_s はスピン回転の周期である。

を導入する。ここに、 $m_i(\mathbf{x}) = \langle v_i(\mathbf{x}, t) \rangle$ は、速度の時間平均で、 $\sigma_i(\mathbf{x})^2 = \langle (v_i(\mathbf{x}, t))^2 \rangle - m_i(\mathbf{x})^2$ はその分散である。

式 (6) をさらに空間平均して得られた速度相関関数 $\overline{C}_i(\tau)$ を図 3 に示す。(a) の速度相関関数は、周期 $0.48T_s$ の正弦波形になっており、この場合の流れ場は周期的に変動していると判断される。一方、(b) の速度相関関数は時間とともに急速に減少し、 $\tau > 0.5T_s$ では小さな負値をとり、 τ の増加とともに徐々にゼロに近づいていく。このときの流れは非周期的とみなされる。

このような測定を、さまざまな Re と Γ の組合せについて行ない、流れの様相を分類した結果を図 4 に示す。ここで、○は周期流を、●は非周期流を表す。●の大きさは、変動強度

$$I(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{\langle |v(\mathbf{x}, t) - \langle v(\mathbf{x}, t) \rangle|^2 \rangle}{\langle |v(\mathbf{x}, t)|^2 \rangle}} \quad (7)$$

の空間平均とともに大きくなる。この図から、非周期流の発生する最小のレイノルズ数は 2000 程度であること、および、ポアンカレ数が 0.1 と 0.2 の間で、変動が相対的に大きくなることがわかる。

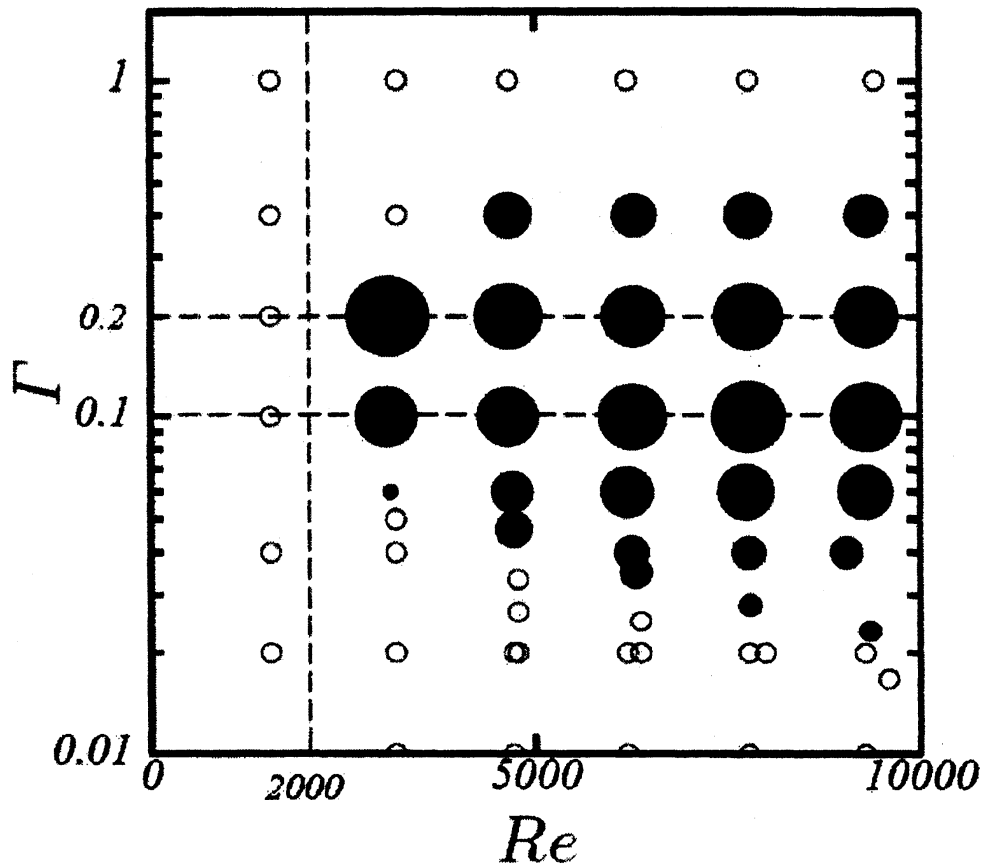


図 4: 流れの相図 ○は周期流。●は非周期流。●が大きいほど変動強度 I が大きい。

4 数値計算 — 定常流の安定性と構造

前節では、周期流と非周期流を分類する相図を実験的に求めた。ここでは、流体の運動方程式の直接数値シミュレーションにより、定常流の安定特性と空間構造を調べる。

連続の式 (2) より速度場はソレノイダルであるから、一般性を失うことなく、2つのスカラー関数、 U と W 、を用いて、

$$\mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}U) + \nabla \times (\mathbf{r}W) \quad (8)$$

と表される。この式の両辺の rot をとることにより、渦度が

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r}W) + \nabla \times (\mathbf{r}\tilde{U}) \quad (9)$$

と表される。ここに、 $\tilde{U} = -\nabla^2 U$ である。 U を速度のポロイダル関数、 W をトロイダル関数という。以下では、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta \cos \varphi$, $z = r \sin \theta \sin \varphi$, なる関係により、球極座標系 (r, θ, φ) を採用する (図 1)。

さて、ナビエ - ストークス方程式 (1) の rot をとったものと、そのまた rot をとったもののそれぞれに \mathbf{r} を内積すると、2つのスカラー関数についての発展方程式、

$$\begin{aligned} & -\nabla_{\perp}^2 \left(\nabla^2 - R_s \frac{\partial}{\partial t} \right) \tilde{U} \\ &= -2R_p \left[\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left\{ \nabla_{\perp}^2 \left(r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - r \frac{\partial}{\partial r} r \cos \theta \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + 2r \cos \theta \right) \right\} W \right] \\ & \quad + \frac{R_s}{r^2} \left[\nabla_{\perp}^2 (r N_r) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(r \frac{\partial}{\partial r} - 2 \right) r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (r^2 \sin \theta N_{\theta}) - \frac{1}{\sin^2 \theta} r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin \theta N_{\varphi}) \right] \\ & -\nabla_{\perp}^2 \left(\nabla^2 - R_s \frac{\partial}{\partial t} \right) W \\ &= -2R_p \left[\frac{\partial W}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \left\{ \nabla_{\perp}^2 \left(r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - r \frac{\partial}{\partial r} r \cos \theta \right) - r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + 2r \cos \theta \right) \right\} U \right] \\ & \quad + \frac{R_s}{r^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} (r^2 \sin \theta N_{\theta}) - r \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta N_{\varphi}) \right], \end{aligned} \quad (10)$$

が得られる。ここで、

$$\mathbf{N} = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (11)$$

は非線形項である。

境界条件 (5) を U と W を用いて書き換えると、

$$U = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial r} = 0, \quad W = \sin \theta \cos \varphi \quad (r = 1 \text{ で}) \quad (12)$$

となる。

これらの方程式を (剛体回転流など) 任意の初期条件のもとで数値的に解く。スカラー関数を, 球極座標系 (r, θ, φ) の方位角方向には球面調和関数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ で, また動径方向にはヤコビ多項式 $\Phi_n^l(r)$ で,

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^l \tilde{U}_{ulm} \Phi_n^l(r) Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (13a)$$

$$W(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^n \sum_{m=0}^l \tilde{W}_{ulm} \Phi_n^l(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (13b)$$

のように展開する [Matsushima & Marcus(1995)]。数値計算における時間積分は, 粘性項にクランク・ニコルソン法, その他の項に2次のアダムス・バッシュフォース法を採用する。非線形項の計算では, エイリアジング誤差を取り除いた擬スペクトル法を採用する。球面調和関数とヤコビ多項式のモード数は, それぞれ 42 と 32 で, 時間きざみ幅は $2\pi/1000$ とする。

4.1 定常流の安定性

渦度の自乗を球体内全体で積分し, エンストロフィー

$$Q = \frac{1}{2} \int_V |\omega|^2 dV \quad (14)$$

を定義する。この時間変化の仕方によって, 流れが定常であるか非定常であるかを区別する。エンストロフィーの時間変化の典型例を図 5 に示す。(a) は減衰振動の場合で定常流が安定であり, 一方 (b) は増幅振動の場合で定常流が不安定である。

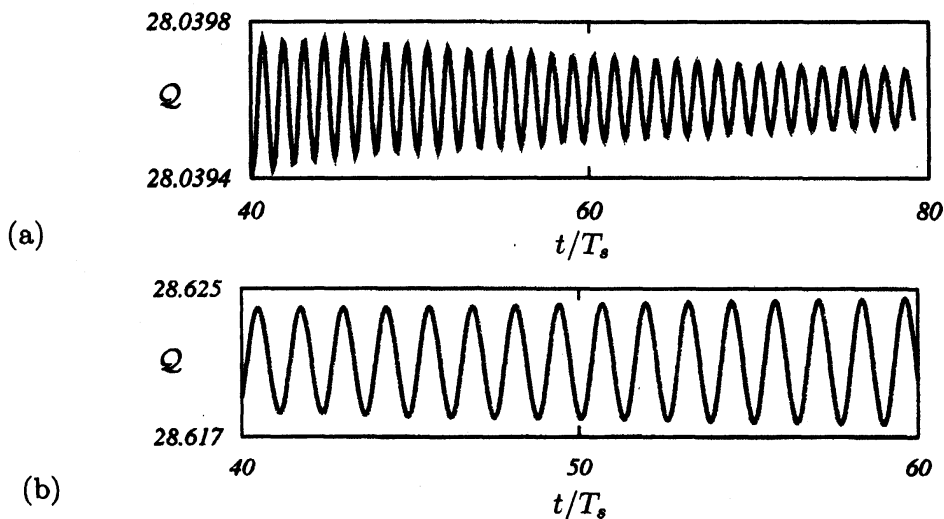


図 5: エンストロフィーの時間変化 $\Gamma = 0.14$. (a) 減衰。 $Re = 1250$. (b) 増幅。 $Re = 1300$.

同様の計算を、 (Re, Γ) のさまざまな組合せに対して行なう。もちろん、このような方法では、厳密に増幅率がゼロになる臨界値を求めることは不可能であり、実際は、図5の例のように、やや増幅とやや減少の場合の間を近似的な臨界値とみなすことになる。図6に、やや増幅の場合を●で示す。グラフの複雑さを避けるためにやや減少のデータは省略してあるが、ほとんどすべての●に対し、その近傍にやや減少のデータの存在することは確かである。これらの●の左側では定常流は安定で、右側では不安定である。臨界曲線の形はかなり複雑で、エンストロフィーの時間変動の周期のパラメータ依存性から、異なるモードの周期流が臨界曲線を形成していると推測される。2つの回転角速度の比であるポアンカレ数が極めて大きいとき ($\Gamma \gg 1$) と小さいとき ($\Gamma \ll 1$) は、いずれも臨界レイノルズ数が大きくなる。このことは、これらの場合の流れは1軸回転の剛体回転流に近いと考えると理解できる。また、不安定性を与える最小のレイノルズ数は約1270で $\Gamma = 0.14$ で実現される。ここで得られた臨界曲線は、前節で述べた周期流の実験による観測と整合している。

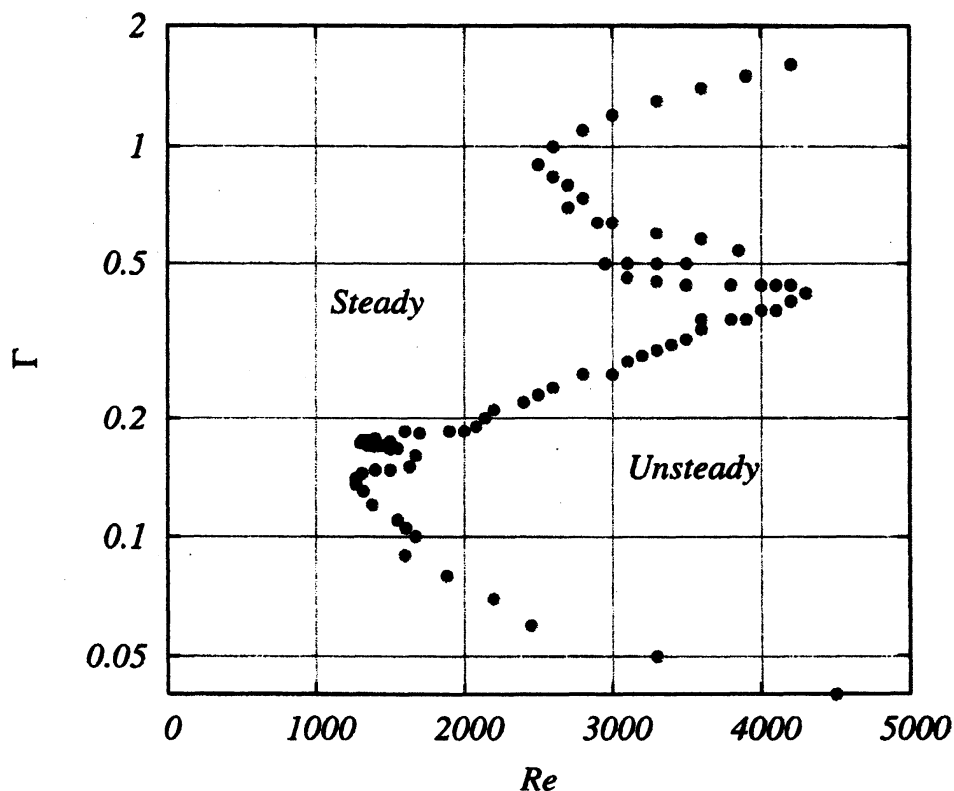


図6: 定常流の臨界曲線 ●の左方で、定常流は安定、右方では不安定である。

4.2 定常流の構造

次に、同じく流体の運動方程式の直接数値シミュレーションで、定常流の空間構造を調べる。ここでは、 $Re = 10$, $\Gamma = 0.1$ の場合に限って述べる。このようにレイノルズ数が小さい場合の流れは剛体回転流に近いと想像されるが、実際そうになっていることを図 7 に示す。5つの小球はよどみ点で、それらは流線でつながっている。球内のほとんどすべての流線は、よどみ点をつなぐこの特別な流線のまわりでほぼ円形になっている。図には、任意に選んだ円形の流線を3本描いてある。

しかし、弱いながらも球は歳差運動をしているので、流れは剛体回転とはほんの少し異なっている。このわずかなずれは、流線を長時間にわたって追跡することにより明白になる。図 8 には、任意に選んだ2本の流線がそれぞれのトーラス面を閉じることなく覆いつくすようすを示している。大きい(あるいは小さい)方のトーラスの流線はトーラスの軸に沿って5055(あるいは3720)回まわって断面内を1周する。隣り合う流線の間隔が極めて狭いので、流線は線としては見えない。球体内はこのような流線トーラスで満たされている。

図 9 は、多くの流線トーラスの (x, y) 面における断面である。スピン回転 (x) 軸の上と下でほぼ同じ形をしている閉曲線どうしは、同一の流線トーラスの共通の切口である。流線に沿う流れは、 x 軸の上方では紙面手前に向き、下方では紙面奥に向いている。矢印は流線の (x, y) 面との引き続く交点の移動方向を示す。この図から、流線は右ネジまたは左ネジのようにねじれたヘリカル構造をしていることがわかる。ところで、太い曲線が2本ある。ひとつはほぼ y 軸に平行な曲線で、もうひとつは中央にある円に近い曲線である。どちらもよどみ点を通る流線からなる曲面の (x, y) 面上の切口である。これらの曲面は、上に述べた2種類の流線のヘリカル構造を分ける分岐曲面になっている。球内はこれらの分岐曲面によって4つの領域に分かれている。

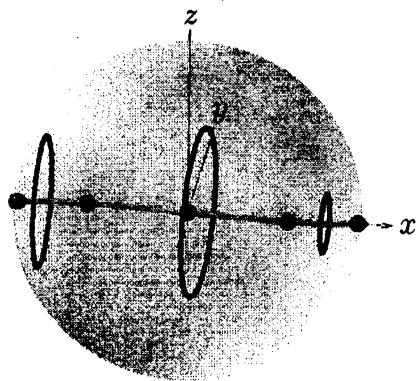


図 7: 定常流の構造 任意に選んだ3本の流線は、ほぼ円形で流れがほぼ剛体回転していることがわかる。 $Re = 10$, $\Gamma = 0.1$.

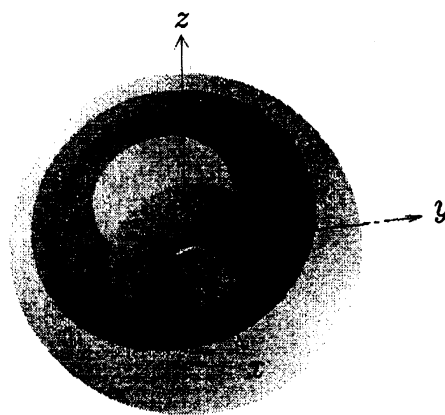


図 8: 流線のトーラス構造 任意に選んだ2本の流線はそれぞれのトーラス面を覆いつくす。 $Re = 10$, $\Gamma = 0.1$.

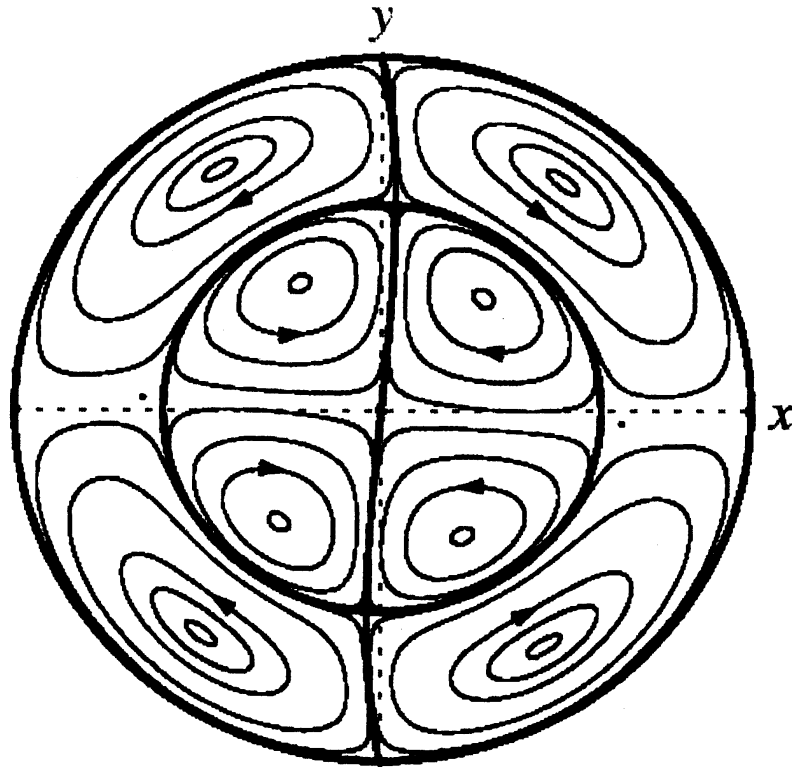


図 9: 流線トーラスの断面 流線の (x, y) 面における交点は余りにも密集しているため、個々の点は識別できず細い線に見える。線に付随する矢印は引き続き交点の移動方向を示す。太い曲線はよどみ点を通る流線からなるもので、ねじれ方向の異なる流線トーラスを境している。 $Re = 10, \Gamma = 0.1$.

5 漸近解析 — 流線トーラスの形状

前節で述べた、数値的に得られた流線トーラスの形を解析的に導出する。レイノルズ数が小さい ($Re \ll 1$) とし、流れは定常 ($\partial/\partial t = 0$) であると仮定する。速度場を Re の冪で展開し、

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + Re\mathbf{u}^{(1)} + Re^2\mathbf{u}^{(2)} + \dots \quad (15)$$

とおく。他の物理量 U, W, ω, N も同じ様に Re の冪で展開し、それらを式 (10)–(12) に代入する。 Re の各冪で独立に方程式と境界条件が満たされるとすると、展開の低次から順次に係数を求めることができる。速度場の係数のゼロ次は

$$u_r^{(0)} = 0, \quad u_\theta^{(0)} = 0, \quad u_\varphi^{(0)} = r \sin \theta \quad (16)$$

で、これはスピン回転軸まわりを球とともに回転する剛体回転流を表す。次に、1 次の項は

$$u_r^{(1)} = 0, \quad u_\theta^{(1)} = \frac{\Gamma}{10}(1-r^2)r \sin \varphi, \quad u_\varphi^{(1)} = \frac{\Gamma}{10}(1-r^2)r \cos \theta \cos \varphi \quad (17)$$

で、これはコリオリ力によって誘起された y 軸まわりの差動回転流を表す。回転角速度は $-Re\Gamma(1-r^2)/10$ で、球の中心に近いほどより大きな値をとる。速度の2次と3次の係数については、紙面の都合で割愛する。

さて、 $Re \rightarrow 0$ の極限で流れは剛体回転になるが、レイノルズ数が小さいがゼロではない ($0 < Re \ll 1$) 場合には、流れは剛体回転から少しずれる。実際、流体粒子を長時間 ($O(Re^{-3})$) 追跡すると、その軌道は円ではなく、 x 軸に対して軸対称なトーラスを描く。ここでは、そのトーラスの断面の形を調べる。

流体粒子の位置座標を (r, θ, φ) とすると、その時間変化は、

$$\dot{r} = u_r, \quad \dot{\theta} = u_\theta/r, \quad \dot{\varphi} = u_\varphi/(r \sin \theta) \quad (18)$$

に従う。いま、 (x, y) 面の任意の点 $(r_{in}, \theta_{in}, 0)$ から出発した流体粒子が x 軸のまわりを一周して再び (x, y) 面に戻ってきたときの r 座標と θ 座標の出発点からのずれを $\Delta r, \Delta \theta$ とする (図 10)。

上で求めた速度場を用いると、

$$\Delta \theta = Re^3 \frac{\pi \Gamma^2}{32400} (1 - r_{in}^2) (3 - 22r_{in}^2 + 27r_{in}^4) \sin 2\theta_{in} + O(Re^4), \quad (19)$$

$$\Delta r = -Re^3 \frac{\pi \Gamma^2}{16200} r_{in} (1 - r_{in}^2)^2 (1 - 3r_{in}^2) (3 \cos^2 \theta_{in} - 1) + O(Re^4) \quad (20)$$

が得られる。

これらの結果 (19) と (20) は、流体粒子の子午面座標 (r, θ) の変動 $(\Delta r, \Delta \theta)$ の大きさが $O(Re^3 \Gamma^2)$ であることを表している。流体粒子の剛体回転からのずれは $O(Re)$ であるが、コリオリ力が $z > 0$ と $z < 0$ のそれぞれの領域で正反対の方向にはたらくので流体粒子がスピン回転軸を一周するとその影響が相殺され、 $O(Re)$ の項ばかりでなく $O(Re^2)$ の項も消えてしまったのである。

流線の空間構造を導出するために、式 (19) と (20) の比をとり、 r と θ に対する微分方程式、

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{2r(1-r^2)(1-3r^2)(3\cos^2\theta-1)}{(3-22r^2+27r^4)\sin 2\theta} \quad (21)$$

を得る。ここに、変数の書き換え $r_{in} \rightarrow r, \theta_{in} \rightarrow \theta, \Delta r/\Delta \theta \rightarrow dr/d\theta$ を行った。この微分方程式を解くと、

$$r^3(1-r^2)^2(\frac{1}{3}-r^2)(1-\cos^2\theta)\cos\theta = \text{const.} \quad (\equiv A \text{ とおく}) \quad (22)$$

が得られる。ここに、 A は積分定数である。図 11 に、式 (22) の等高線をいくつかの A の値に対して示す。矢印は、引き続く交点の移動の方向を指している。この図は、流線の子午面 ((x, y) 面) における交点を表していることに注意する。すなわち、各流線はスピン回転軸まわ

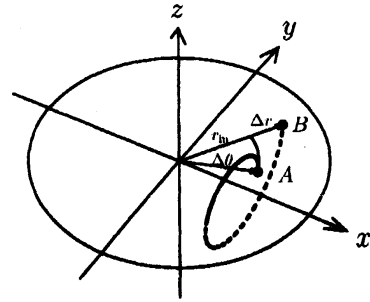


図 10: ポアンカレ写像 (x, y) 面の点 A から出発した流体粒子が x 軸のまわりを回って再び (x, y) 面の点 B で交わったとする。

りに軸対称なトーラス上を動く。流体粒子の軌道を $O(Re^{-3}\Gamma^{-2})$ の時間帯で眺めると、このようにスピン回転 (x) 軸のまわりに軸対称であり、かつ原点に関して反対称なトーラス構造が現れるのである (図 9 と比較されたい)。

円領域は、 x 軸、 y 軸および中心が原点にあり半径が $r_{c2} \equiv 1/\sqrt{3} (= 0.577\cdots)$ の円により 8 等分される。この図は (x 軸まわりの) 軸対称な場の断面であるから、全球は 2 つの境界面 — 赤道面 (この図では y 軸) と半径 r_{c2} の球 — により 4 つの領域に分けられていることになる。各領域における曲線に付随する矢印が示すように、隣合う領域の間で交点の動きが逆になっている。このことは、ヘリカルな流線の振れの向きが境界面を境に逆転していることを意味する。

上部領域 ($r > r_{c2}$) の流体粒子は、スピン回転軸付近で上昇し赤道付近で下降する。下部領域 ($r < r_{c2}$) の流体粒子はその逆である。したがって、球表面近傍の流体粒子はこの分岐球面までは沈むがそれより内側へは行かないし、一方、この分岐球面の内側の流体粒子は決してこの境界を横切って外側へは行かない。

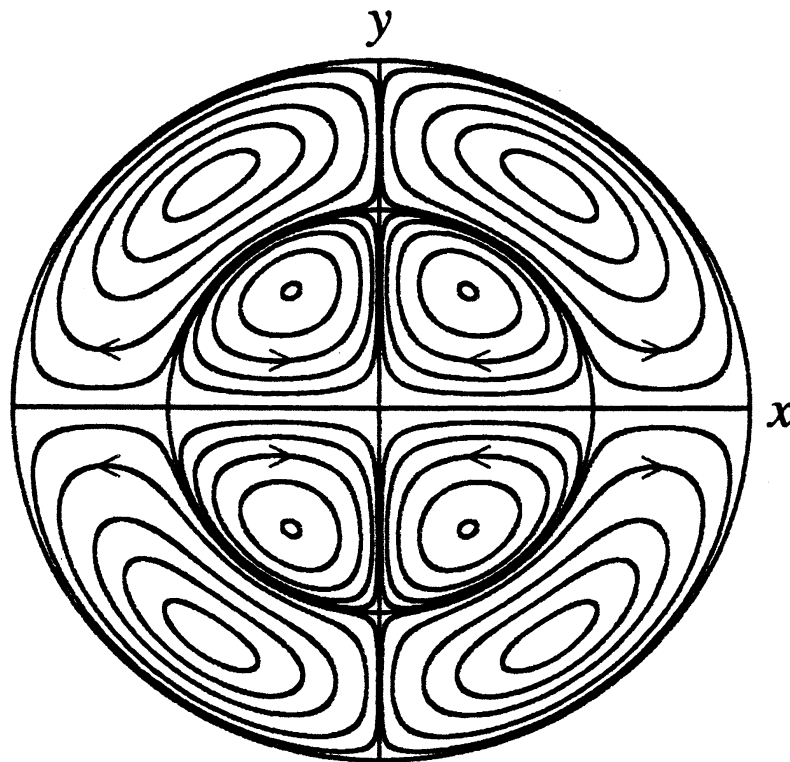


図 11: 流線トーラスの断面 流体粒子の長時間 ($O(Re^{-3}\Gamma^{-2})$) にわたる軌道は、スピン回転 (x) 軸のまわりに軸対称で、原点に関して点対称トーラス構造を示す。トーラスの (x, y) 面における断面形状は $xy^2(1-x^2-y^2)^2(\frac{1}{3}-x^2-y^2) = A$ と表される。図の $x^2+y^2 < \frac{1}{3}$ の領域では、定数 A は、 ± 0.0001 , ± 0.0004 , ± 0.001 , ± 0.002 , ± 0.003 を、また、 $x^2+y^2 > \frac{1}{3}$ の領域では、 ± 0.0001 , ± 0.0009 , ± 0.003 , ± 0.005 , ± 0.007 の値をとる。曲線に付随する矢印は引き続く交点の移動の方向を示す。

6 おわりに

本稿は、直交する2軸のまわりの回転によって駆動される球体内部の流れの挙動を、室内実験、数値シミュレーションおよび漸近解析により調べた結果の第1報である。一定角速度の回転によって駆動される球体内部の流れという、単純な幾何形状と駆動機構からなるこの流体系は、円管流、平行平板間流、平板を過ぎる流れ、等とともに基本的で重要な流れのひとつである。コンパクトな乱流発生装置あるいは混合器としての応用も視野に入れつつ、2軸回転球体内流れの特性の体系的な解明と整理に取り組んでいきたい。

数値計算は、京都大学基礎物理学研究所の SX8、京都大学学術情報メディアセンターの HPC2500 を用いて行った。

参考文献

- F. H. Busse, Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell, *J. Fluid Mech.* **33** (1968) 739-751.
- Goto, S., Ishii, N., Kida, S. and Nishioka, M. 2007 Turbulence generator using a precessing sphere, *Phys. Fluids* (in print).
- Malkus, W.V.R. 1968 Precession of the earth as the cause of geomagnetism, *Science*, **160**, 259-264.
- Matsushima, T. and Marcus, P.S. 1995. A spectral method for polar coordinates. *J. Comput. Phys.* **120**, 365-374.
- Noir, J., Jault, D. and Cardin, P. 2001 Numerical study of the motions within a slowly precessing sphere at low Eckman number, *J. Fluid Mech.* **437**, 282-299.
- Noir, J., Cardin, P., Jault, D. and Masson, J.-P. 2003 Experimental evidence of nonlinear resonance effects between retrograde precession and the tilt-over mode within a spheroid, *Geophys. J. Int.* **154**, 407-416.
- A. Tilgner and F. H. Busse, Fluid flows in precessing spherical shells, *J. Fluid Mech.* **426** (2001) 387-396.
- J. P. Vanyo, J. R. Dunn, Core precession: flow structures and energy, *Geophys. J. Int.* **142** (2000) 409-425.
- Vanyo, J., Wilde, P., Cardin, P. and Olson, P. 1995 Experiments on precessing flows in the Earth's liquid core, *Geophys. J. Int.* **121**, 136-142.